IV—25 加重平均の標準偏差解析，正解，誤用解２題

北海道産業専門学校 正会員 今井芳雄

§1．前言．測量では正規分布（normal distribution）を扱います。1つの目的に沿った n 個の観測値 M_i ($i=1,2,\cdots\cdots n$) 例えばコンクリートの圧縮強度試験値の算術平均 x_0 の標準偏差 σ_0 はコンクリート品質のバラツキの標準偏差 σ を求めてこそ、始めて定まるので、この σ は

$$\sigma=\pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}(x_0-M_i)^2}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}v_{ai}^2}{n-1}}$$ であって

これを用いて

$$\sigma_0=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\pm\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}v_{ai}^2}{n-1}}\quad\cdots\cdots(1.1)$$

によって評価されている。即ち品質の散らばり具合が算術平均 σ_0 を支配していることがわかる。次に加重平均 X_0 の標準偏差 σ_0 も加重される個々の観測の持つ標準偏差 σ_i ($i=1,2,\cdots\cdots\cdots n$) の絶対値が重要な要素になる可きであるがそうでなく

$$\sigma_0=\pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}p_iv_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{i=n}p_i\right)(n-1)}}\quad\cdots\cdots(1.2)$$

によって評価することが多用され、これ1色である。上式で v_i ($i=1,2,\cdots\cdots\cdots n$) は加重平均 X_0 からの残差である。然し (1.2) 式は1連の σ_i ($i=1,2,\cdots\cdots\cdots n$) が全般的に高い精度を表わす時も、又、全般的に低い精度であっても p_i ($i=1,2,\cdots\cdots\cdots n$) の連比が同一である限り σ_0 に変化を及さない。従ってこのままでは個々の σ_i の絶対評価が σ_0 に機能しないのである。この事は (1.1) 式に比し不合理であることは間違いないところである。本論はこの事を論ずるものである。

§2．重(おもみ)．(weight)　測量で云う重み (Weight) は基準に対する相対重みであって、基準とする観測を1つえらびその重みを1とする。連比が同じにさえなれば1でなく任意に5としてもよい。この重み1とする観測の標準偏差を σ とする．基準でない他の観測の標準偏差の1つが σ_1 であればこの観測の重みは p_1 であって

$$p_1=\frac{\sigma^2}{\sigma_1^2}\quad\cdots\cdots(2.1)$$

同様に

$$p_2=\frac{\sigma^2}{\sigma_2^2}\quad\cdots\cdots(2.2)$$

と定義する (2.1) 式では同じ p_1 を示す σ と σ_1 の絶対値の組合わせは無数にありうるわけである．従って個々の観測の精度の絶対の善し悪しは連比の $1:p_1:p_2:\cdots:p_n$ のみでは区別がつかない．この事は (1.2) 式をみると連比 $1:p_1:p_2:\cdots\cdots:p_n$ が同じならば左辺 σ_0 は常に同じということになる 定性的にもそうある可きでないことは明らかである

§3．観測の個々の標準偏差によって加重平均の標準偏差を求める解析（正統解）
観測値を $M_1, M_2\cdots\cdots M_n$，これの weight（重み）を $p_1, p_2, \cdots\cdots p_n$ とする

$$p_i = \frac{\sigma^2}{\sigma_i^2} \quad (i=1, 2, \cdots\cdots n) \quad \text{------------} (3.1)$$

加重平均を X_0 とすれば最小自乗法からして最確値として得られる

$$X_0 = \frac{p_1 \cdot M_1 + p_2 M_2 + \cdots\cdots + p_n \cdot M_n}{p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_n} \quad \text{------------} (3.2)$$

この場合 $p_1 : p_2 : \cdots : p_n$ の連比が同じでさえあれば X_0 そのものは変化しない.それは M_i が絶対値だからである 加重平均 X_0 からの観測値の残差を v_i $(i=1, 2, \cdots n)$ とする

$$v_i = M_i - X_0 \quad \text{------------} (3.3)$$

この残差 v_i に weight p_i を掛けて $\sum_{i=1}^{i=n} p_i v_i$ を作る

$$p_1 v_1 = p_1(M_1 - X_0) = p_1 M_1 - p_1 \frac{p_1 M_1 + p_2 M_2 + \cdots + p_n M_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

$$p_2 v_2 = p_2(M_2 - X_0) = p_2 M_2 - p_2 \frac{p_1 M_1 + p_2 M_2 + \cdots\cdots + p_n M_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

$$\vdots$$

$$p_n v_n = p_n(M_n - X_0) = p_n M_n - p_n \frac{p_1 M_1 + p_2 M_2 + \cdots\cdots p_n M_n}{p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_n}$$

之々相加えれば

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i v_i = \sum_{i=1}^{i=n} p_i M_i - \frac{p_1 M_1 + p_2 M_2 + \cdots + p_n M_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \times (p_1 + p_2 + \cdots + p_n) \cdots (3.4)$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} p_i M_i - \sum_{i=1}^{i=n} p_i M_i = 0 \quad \text{------------} (3.5)$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{i=n} p_i v_i = 0 \quad \text{------------} (3.6)$$

(3.6)式は算術平均 x_0 からの残差 v_{ai} について $\sum_{i=1}^{i=n} v_{ai} = 0$ $\cdots\cdots\cdots$ (3.7)

に似た関係である 観測の精粗に関係ない。(3.2)式 X_0 の真値を X, $x_i = M_i - X$ $\cdots\cdots$ (3.8)

とおくと

$$\sum_{i=1}^{n} p_i v_i = p_1\{(M_1 - X) + (X - X_0)\} + p_2\{(M_2 - X) + (X - X_0)\} + \cdots\cdots + p_n\{(M_n - X) + (X - X_0)\}$$

$$= p_1\{x_1 + (X - X_0)\} + p_2\{x_2 + (X - X_0)\} + \cdots\cdots + p_n\{x_n + (X - X_0)\}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_i + \sum_{i=1}^{i=n} p_i (X - X_0) \quad \text{------------} (3.9)$$

(3.9)式左辺は(3.6)式によりZero であるから

$$X - X_0 = -\frac{\sum_{i=1}^{i=n} (p_i x_i)}{\sum_{i=1}^{i=n} p_i} \quad \text{------------} (3.10)$$

$$\therefore X - X_0 = -\frac{p_1 x_1}{\sum_{i=1}^{i=n} p_i} - \frac{p_2 x_2}{\sum_{i=1}^{i=n} p_i} \cdots\cdots - \frac{p_n x_n}{\sum_{i=1}^{i=n} p_i} \quad \text{------------} (3.11)$$

(3.11)式左辺は加重平均 X_0 の誤差であり右辺 x_i の1次合成関数である.誤差論により左辺も正規分布(normal distribution)する。その標準偏差は X_0 の標準偏差であり これを σ_0 とすれば x_i の標準偏差即ち M_i の標準偏差 σ_i の伝播量として求められる

誤差伝播法則から

$$\alpha_0^2=\left(\frac{p_1}{\sum_{i=1}^{i=n}p_i}\right)^2\alpha_1^2+\left(\frac{p_2}{\sum_{i=1}^{i=n}p_i}\right)^2\alpha_2^2+\cdots\cdots+\left(\frac{p_n}{\sum_{i=1}^{i=n}p_i}\right)^2\alpha_n^2 \cdots\cdots (3.12)$$

$$=\frac{p_1^2\alpha_1^2+p_2^2\alpha_2^2+\cdots\cdots+p_n^2\alpha_n^2}{\left(\sum_{i=1}^{i=n}p_i\right)^2} \cdots\cdots (3.13)$$

$$\therefore \alpha_0=\frac{1}{\sum_{i=1}^{i=n}p_i}\sqrt{p_1^2\alpha_1^2+p_2^2\alpha_2^2+\cdots+p_n^2\alpha_n^2} \cdots (3.14) =\frac{1}{\sum_{i=1}^{i=n}p_i}\sqrt{\left(\frac{\alpha^2}{\alpha_1^2}\right)^2\alpha_1^2+\left(\frac{\alpha^2}{\alpha_2^2}\right)^2\alpha_2^2+\cdots\left(\frac{\alpha^2}{\alpha_n^2}\right)^2\alpha_n^2}$$

$$\cdots (3.15) \quad =\frac{1}{\sum_{i=1}^{i=n}p_i}\sqrt{\frac{\alpha^4}{\alpha_1^2}+\frac{\alpha^4}{\alpha_2^2}+\cdots+\frac{\alpha^4}{\alpha_n^2}}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{i=n}p_i}\alpha\sqrt{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n} \cdots (3.18)$$

$$\therefore \alpha_0=\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n}p_i}}\cdot\alpha \cdots\cdots (3.19) \cdots\cdots (3.19)$$

(3.19)式は(1.2)式の如く改めて、加重平均X_0からの残差 v_i $(i=1,2,\cdots\cdots n)$と、手数のかゝるv_i^2も求めることなく weight 1 なる観測の標準偏差 α が式の中に入ってくる正統解析である. weight p_i はなくても α_i はなくてはならぬ必要 data 要素である

§4. 算術平均からの残差2系列の相互変換

§1により1系列の標準偏差αは $\alpha=\pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}v_{ai}^2}{n-1}}$ $\cdots\cdots (4.1)$ 同様にもう1つα_1系列については

$$\alpha_1=\pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}v_{ai}}{n-1}} \cdots\cdots (4.2)$$ である

weight $p_1=\frac{\alpha^2}{\alpha_1^2}$ であり α_1系列の残差と積$\sqrt{p_1}\,v_{ai}$を作る.$(i=1,2,\cdots\cdots n)$

$$\therefore \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}(\sqrt{p_1}\,v_{ai})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha_1^2}v_{ai}^2\right)}{n-1}}=\frac{\alpha}{\alpha_1}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}v_{ai}^2}{n-1}}=\frac{\alpha}{\alpha_1}\times\alpha_1=\alpha \cdots\cdots (4.3)$$ である. 即ち残差が算術平均からの残差であれば α_1系列の観測はこれに$\sqrt{p_1}$を掛けると基準とした観測α系列に変換出来る. v_{ai} $(i=1,2,\cdots n)$がnまであるがp_1は共通だからである

§5、加重平均X_0からの残差系列の相互変換

加重平均X_0からの残差をv_i $(i=1,2,\cdots\cdots n)$、加重される個々の観測の weight をp_i $(i=1,2,\cdots\cdots n)$, 個々の標準偏差をα_i $(i=1,2,\cdots\cdots n)$. weight を1にとる基準観測の標準偏差をαとする. そうであれば $p_i=\frac{\alpha^2}{\alpha_i^2}$ である (4.3)式に準じ$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}(\sqrt{p_i}\,v_i)^2}{n-1}}$を作りこれにとどめないで更に展開する すなわち

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}(p_iv_i^2)}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha_i^2}v_i^2\right)}{n-1}}=\alpha\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{v_i}{\alpha_i}\right)^2}{n-1}} \cdots\cdots (5.1)$$ 即ち(5.1)式は左辺が直ちにαそのものに equal にならないことを示す

$$\therefore \alpha=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}(\sqrt{p_i}\,v_i)^2}{n-1}}\times\sqrt{\frac{n-1}{\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{v_i}{\alpha_i}\right)^2}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n}(p_iv_i^2)}{\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{v_i}{\alpha_i}\right)^2}} \cdots\cdots (5.2)$$

§6. 加重平均X_0の標準偏差α_0 評価の検討

(6.2)式 $\cdots\cdots$ $\alpha_0=\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n}p_iv_i^2\Big/\left(\sum_{i=1}^{i=n}p_i\right)(n-1)}$ は $\alpha_0=\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n}p_i}}\alpha \cdots\cdots (3.19)$ において

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} p_i v_i^2}{n-1}}$$

とおいたものであってこれは(5.1)式左辺を根據なしに直ちにequal, σ と断定したものである。(5.1)式末項式の如く $p_i v_i^2$ によって、σ を評価するためには分母は $n-1$ でなく $\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{v_i}{\sigma_i}\right)^2$ を入れたものでなければならない。§4に述べた如く、算術平均からの残差相互変換のみに生きる条件を誤用したものと云える

§7、計算例(1) 光速測定でFizauその他の人によって行われた結果は表7.1である

表 7.1

資料としての data			筆者によるweight
観測番号	光速 km/sec	標準偏差	$p_i=\left(\frac{\sigma}{\sigma_i}\right)^2$
1	298,000	± 1,000 km	$p_1=(1000/1000)^2=1$
2	298,500	± 1,000	$p_2=(1000/1000)^2=1$
3	299,900	± 200	$p_3=(1000/200)^2=25$
4	300,000	± 1,000	$p_4=(1000/1000)^2=1$
5	299,930	± 100	$p_5=(1000/1000)^2=1$

表7.1のdataによって、光速の加重平均 X_0 を求めてみる

$$X_0=\frac{p_1M_1+p_2M_2+p_3M_3+p_4M_4+p_5M_5}{p_1+p_2+p_3+p_4+p_5}$$

$$=(298{,}000^{km}\times 1+298{,}500^{km}\times 1+299{,}900^{km}\times 25+300{,}100^{km}\times 1+299{,}930^{km}\times 100)/(1+1+25+1+100)$$

$$=10^5\times 2.9991679687 5\ km \cdots\cdots (7.1)$$

X_0 のもつ標準偏差を σ_0 とすると

$$\sigma_0=\sigma\times\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{i=5} p_i}}\cdots\cdots(3.19)=1000^{km}\times\frac{1}{\sqrt{1+1+25+1+100}}=1000^{km}\times\frac{1}{\sqrt{128}}$$

$$=88.3884^{km}\cdots\cdots\cdots(7.2)$$

(3.19)式は基準観測精度の要素 σ が入っている大切な点であり、加重平均 X_0 からの残差を必要としていない。

次に(1.2)式によって加重平均 X_0 の標準偏差 σ_0 を求めてみる このためには X_0 からの残差 $v_i\ (i=1,2,3,4,5)$ と $(v_i)^2$ その他新らたに、多くの項の準備計算が必要である　表7.2を用意する

表 7.2

観測番号	観測光速, 標準偏差, weight, 加重平均値 X_0	残差 $v_i=X_0-M_i$	$p_i v_i$	v_i^2	$p_i v_i^2$
1	表7.1による	1,916·796875 km	1,916·796875 km	3,673,313.38501	3,673,313.38501
2		1,416·796875 km	1,416·796875 km	2,007,947.760	2,007,947.760
3		(-) 73.203125 km	(-)1830.078125 km	5,358.6975	133,967.4375
4		(-)183.203125 km	(-) 183.203125 km	33,563.38501	33,563.38521
5		(-) 13.203125 km	(-) 1,320.3125 km	174.2818	17,428.180
総括			$\sum_{i=1}^{i=5} p_i v_i=0$	$\sum_{i=1}^{i=5} p_i v_i^2=5{,}868{,}220.14772$	

$$\therefore\ \sigma_0=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=5}(p_i v_i^2)}{\left(\sum_{i=1}^{i=5}p_i\right)(n-1)}}\ \text{に據るとすれば}=\sqrt{\frac{5{,}868{,}220.14772}{128\,(5-1)}}=107.058^{km}\cdots\cdots\cdots(7.3)$$

即ち先に計算した $\sigma_0=88.3884^{km}$ と相当な開きがある。この値は $p_1, p_2 \cdots p_5$ の連比が同じでさえ

あれば基準 α と他の標準偏差 α_i が共に大になっても共に小になっても同じ 107.058^{km} であることは(7.3)式の中に α_i の絶対値が見えないことからも明らかである

§8. 計算例(2)　(5.2)式によるCheck計算

$$\sum_{i=1}^{i=5} p_i v_i^2 = \alpha^2 \sum_{i=1}^{i=5} \left(\frac{v_i}{\alpha_i}\right)^2 \quad \text{であるから右辺を展開する}$$

$$= \alpha^2 \left\{ \left(\frac{1,916.796875^{km}}{1000^{km}}\right)^2 + \left(\frac{1,416.79687^{km}}{1000^{km}}\right)^2 + \left(\frac{-73.203125^{km}}{200^{km}}\right)^2 + \left(\frac{183.20355^{km}}{1000^{km}}\right)^2 \right.$$

$$\left. + \left(\frac{13.203125^{km}}{100^{km}}\right)^2 \right\} = \alpha^2 \{ (1.916796875)^2 + (1.41679687)^2 + (0.36601562)^2 + (0.18320355)^2$$

$$+ (0.13203125)^2 \} = \alpha^2 \{5.86638686\} \quad \therefore 5,868,220.14772 = \alpha^2 \times 5.86638686$$

$\therefore \alpha = \pm\sqrt{1000312.507} = \pm 1000^{km}$ 即ちweight 1の基準にとった α そのものになる.

計算例(1)の(7.3)式は $\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{i=n} p_i v_i^2}{n-1}}$ に據ったものであった、改めて数値計算を施すと

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{5,868,220.14772}{5-1}} = \sqrt{1467055.037} = \pm 1211.220^{km/秒}$$ ということで、然も仮りに表7.1の観測諸元で仮りに標準偏差が1率に何%かに変っても それに追随出来なく常に 1211.220^{km} というわけに陥る　次に表7.1諸元を表8.1の様に、標準偏差を65%に減じてみる. weight の連比 $p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5$ は $1:1:25:1:100$ で同じである

表8.1

観測番号	観測光速 M_i	筆者による仮りの標準偏差	筆者によるweight
1	298,000 km/秒	± 650 km/秒	$p_1 = \left(\frac{650}{650}\right)^2 = 1$
2	298,500	± 650	$p_2 = \left(\frac{650}{650}\right)^2 = 1$
3	299,900	± 130	$p_3 = \left(\frac{650}{130}\right)^2 = 25$
4	300,100	± 650	$p_4 = \left(\frac{650}{650}\right)^2 = 1$
5	299,930	± 65	$p_5 = \left(\frac{650}{65}\right)^2 = 100$

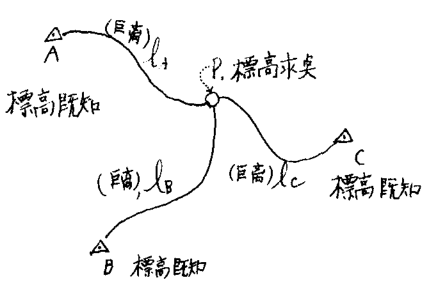
表8.1の様に標準偏差が改善されてもweightの連比に変化なく表7.1と同じであるから $\sum_{i=1}^{i=5} p_i v_i^2$, $\sum_{i=1}^{i=5} p_i$, $(n-1)$ いづれにも変化なく加重平均 X_0 の標準偏差 α_0 も同じということになる.　(3.19)式によって計算すると $\alpha_0 = \alpha \times \dfrac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{i=5} p_i}}$ ……(3.19)

$$\therefore \alpha_0 = 650^{km/秒} \times \frac{1}{\sqrt{1+1+25+1+100}} = 57.4524^{km/秒} = 88.3884^{km/秒} \times 0.65$$

§9. 結言

加重平均 X_0 のもつ標準偏差 α_0 の解析において現在測量で専ら多用されている

誤用解についてその誤用であることを明らかにした　誤用の根本は算術平均 x_0 からの残差 v_{ai} $(i=1,2,\cdots\cdots n)$ についてはこれに $\sqrt{p}$ をかけ weight 1 の観測に変換出来ることを加重平均 X_0 からの残差 v_i $(i=1,2,\cdots\cdots\cdots n)$ についてもそのまゝ適用出来るとしたことにあったわけである　誤用であっても計算の手間が省けるならまだしも v_i^2 という大変な手間がふえる余分な事まであるわけであった　もともと weight p_i $(i=1,2,\cdots\cdots n)$ は基準とする a とこれに対する a_i $(i=1,2,\cdots\cdots n)$ の相対関係の符号にすぎなかつたのであるから $\sum_{i=1}^{i=n} p_i v_i^2$ から新らたに基準とした a を導き出す条件を含んでいないのである　従って (3.19) 式も分母の $\sum_{i=1}^{i=n} p_i$ も a_i $(i=1,2,\cdots n)$ の代数式に戻る性質のものである　(3.2) 式分母は $\sum_{i=1}^{i=n} p_i$ であるが　(3.19) 式分母は $\sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} p_i}$ と平方根であるから a_i に a の影きようが表らわれるわけである



標高（地盤高）既知の3点 A, B, C から水準距離 l_A l_B, l_C の3経路を経て水準測量を実施し求点 P の加重平均標高を定めようとする場合，$1/l_A$, $1/l_B$, $1/l_C$ という水準距離だけの逆数を加重の weight としている様であるが、明らかにこれのみでは水準測量の標準偏差（往復水準差から求める）が含まれていない　にも係らず P 点標高の標準偏差が算出される。水準測量は往復水準差の絶対量が精粗判定の決め手なのである　（1985．10．11．）