産総研
ともに挑む。つぎを創る。

リカレンスプロット事始（ことはじめ）（仮）

城 真範　（産総研 人間情報インタラクション）

2025.7.30
統計数理研究所（諸科学集会）

目次

■目次

● リカレンスプロットの作り方

- 時系列を可視化する方法の一つ（カオス・確率過程・周期時系列）
  実は差分さえ取れれば何でも構わない（メモリ状態の差など）
- 二次元のプロット
- 生命科学では「Contact map」とも呼ばれる（アミノ酸配列）。

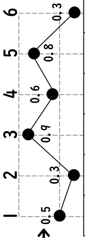
◆ 定義

リカレンススレートを ε とし、時系列 x 上の点 $x(i)$ と点 $x(j)$ から、リカレンスプロット R の要素 $R(i,j)$ を次式で与える。

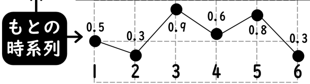
$$R(i,j) = \begin{cases} 1 & \textbf{\textit{if}} \quad \|x(i) - x(j)\| \leq \varepsilon, \\ 0 & \textbf{\textit{otherwise}} \end{cases}$$

◆ 具体的なプロットのしかた

①点同士の差の絶対値を求める



0.2	0.0	0.6	0.3	0.5	0.0
0.3	0.5	0.1	0.2	0.0	0.5
0.1	0.3	0.3	0.0	0.2	0.3
0.4	0.6	0.0	0.3	0.1	0.6
0.2	0.0	0.6	0.3	0.5	0.0
0.0	0.2	0.4	0.1	0.3	0.2



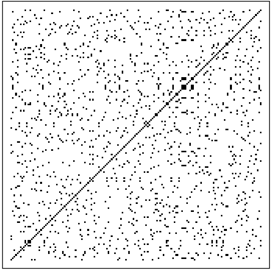
②差0.2で二値化 →

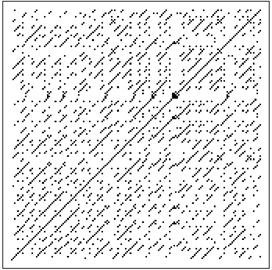
1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1

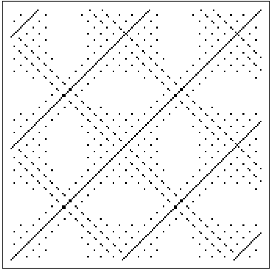
1：黒
0：白

◆ 実例：いくつかの時系列のリカレンスプロット

順に、一様乱数、Logistic 写像（$x_{n+1} = 3.8x_n(1 - x_n)$）、複合正弦波







★ Logistic 写像（決定論カオス）では斜めの線が多め★

対称で常に斜めの線が見える（自分自身との距離はゼロ）

◆ 描画時に 2 つの自由度がある

- 差：距離尺度（点同士の距離の決め方）
  L_n ノルム、角度距離（位相差距離）、編集距離（点過程）、対称 KL 等
  要素同士の距離が決められるデータであれば何でもリカレンスプロットで描ける
- 二値化：リカレンスレート ε（どれくらい近い点を近いとみなすか）
  極端な値では情報欠損・情報論的には白黒が半々になるような値がベストだが一般には 0.01〜0.1 が使われる。グラフ化したとき連結になるように決めるのも手＝値をソートして隣接最大差より少しだけ大きくする

◆ リカレンスプロットの利点

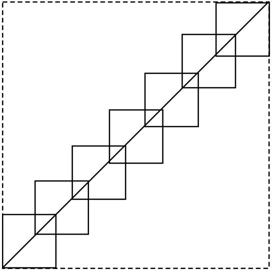
- 短い時系列でも利用可能：RNN 学習が難しい問題も扱える。
- 時系列の種類を問わない：非線形、非定常、点過程、確率過程
- 時系列が長ければ任意の部分を切り出して解析可能

◆ リカレンスプロットの弱点

- 二次元なのでたくさんのメモリが必要（それに伴う時間計算量）
  - ▷ GPU との親和性がよいので、並列化と GPU 利用で高速化
  - ▷ 「リカレンスプロット of リカレンスプロット」(RoR) の利用
- 定数など、一部適さない時系列→逆に複雑な時系列は得意

◆ 参考：RoR（Fukino,2016）

重なりを持つように時系列を分割してスライドさせながらリカレンスプロットを描いてゆく。



● 決定論的カオスとリカレンスプロット

そもそも、なんのためにプロットするの？ →決定論的カオス性の検出（Eckmann,1987）

ポアンカレの回帰定理（Poincaré Recurrence Theorem）

測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ と可測変換 $T : X \to X$ が与えられており、μ が $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A) \quad (\forall A \in \mathcal{B})$ と $\mu(X) < \infty$ を満たすとき、任意の可測集合 $A \in \mathcal{B}$ に対して、

$$A_{\mathrm{rec}} := \left\{ x \in A \mid \exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N} \ \textbf{s.t.} \ \lim_{k \to \infty} T^{n_k}(x) = x \right\}$$

という集合を考えると、$\mu(A \setminus A_{\mathrm{rec}}) = 0$ が成り立つ。

意味：アトラクタの形状が有限区間内にあって時間不変な系（μ）での時間発展では「ほとんどすべての点（測度 0 の例外しかない）」$x \in A$（A は軌道）は時刻 $\{n_k\}$ まで時間発展（$T^{n_k}(x)$）すれば再び軌道 A に戻ってくる。

ならば、一体いつ戻ってくるのかが系を特徴づけるのではないか＝戻って来るパターンを可視化する

→リカレンスプロット

◆ 斜めの線だけではない

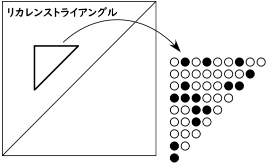
現代では各種統計量を計算：Recurrence quantification analysis（RQA）
（Zbilut & Webber 1992）

- 斜めの線の長さの分布、縦の線の長さの分布
  そこから計算されるエントロピー
- 斜めの白い線の長さの分布、縦の白い線の長さの分布
  そこから計算されるエントロピー
- 縦の線の部分的なリカレンスレート（Trend）、その推移

など。時系列を統計量の組で再表現する。
※ PyRQA パッケージは有名（https://pypi.org/project/PyRQA/）

◆ リカレンストライアングル（Hirata,2021）

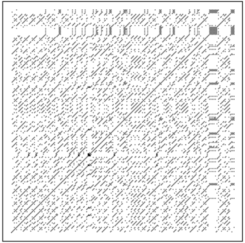
斜めの線よりも構造に踏み込んだ決定論性の検出

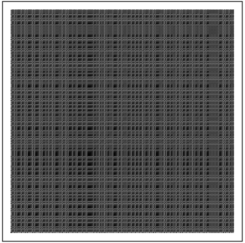


長さ L のトライアングルに含まれる点のパターン数が L の増加に対して指数関数的増大以下→決定論系、指数関数的増大より速い→確率論的系

● 様々なリカレンスプロット

- 基本（左）：1 つの時系列に対してユークリッド距離を使い 2 値化
- 非閾値リカレンスプロット（右）：2 値化しない



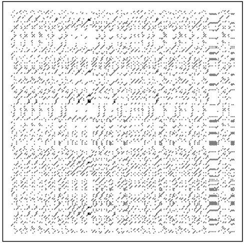


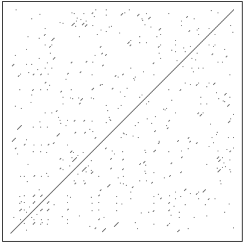
※ヒートマップにする場合もある。

◆ 2 つのデータからのリカレンスプロット

産総研
ともに挑む。つぎを創る。

- クロスリカレンスプロット (Marwan2004)：異なる 2 つの時系列に対してのリカレンスプロット
  同じ時系列の異なる部分にも使える。同期や位相関係の解析に使う
- ジョイントリカレンスプロット (Romano2004)：2 つのリカレンスプロットの AND をとったもの

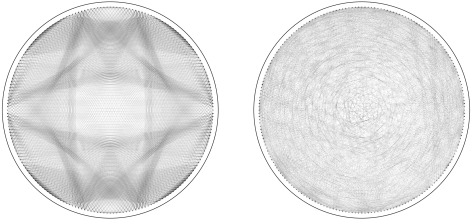




◆ 円形リカレンスプロット

- 特徴：時間を円周上に配置し、リカレンスのあるペアを弦で結ぶ。
- 用途：周期性の強調、音楽・生理信号の構造可視化。

※左は複合正弦波、右は Logistic 写像



● リカレンスプロットからの時系列復元

連結で十分長いリカレンスプロットのみから（定数倍を除いた）元の時系列を復元できる。おそらくリカレンスプロット最大の特長

（Hirata, Horai & Aihara (2008)）

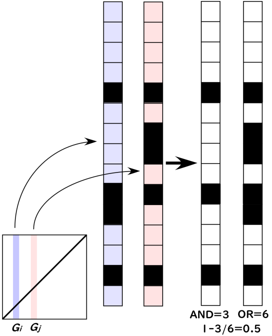
- **条件 1：時系列が十分に長いこと**
- **条件 2：ネットワークとしてみたとき連結になっていること**

※リカレンスプロットは二値化されているのにもとの時系列の情報を十分に含んでいる

◆ 実際のアルゴリズム

産総研 ともに挑む。つぎを創る。

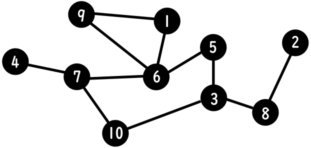
1．隣接する点同士のパターン G の近さ $d(i, j)$ を求める



$$d(i, j) = 1 - \frac{|G_i \text{ AND } G_j|}{|G_i \text{ OR } G_j|}$$

◆ 実際のアルゴリズム（続）

2. 隣接している点同士をたどってすべての点同士の最短距離を求める（ダイクストラ法など）



3. すべての点同士の距離（距離行列）ができたら MDS（多次元尺度法）で点の順番を決める＝（定数倍を除いた）時系列の復元が完成

※なお MDS は結構重い。「十分長い時系列」という条件で実用限界が決まる。
※連続時系列に対する改良が報告されている（Hirata,2024）。

産総研 ともに挑む。つぎを創る。

◆ そもそもなぜ2値化するのか？

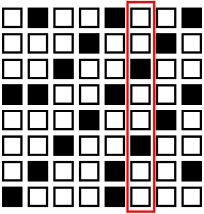
- データ量縮減
- 見やすさ（非閾値リカレンスプロットは意外に見にくい）
- ビット列＝記号列として扱える→時系列を記号列へ変換

同じリカレンスプロットに複数の解釈がある＝リカレンスプロットを経由したデータ変換に使える（複雑な情報における橋渡しツール！）

- 縦（横）の列とビット列解釈
- 実対称行列としての解釈

◆ 縦（横）の列とビット列解釈

- 時系列を単語の並び（言語）に変換 (Graben,2013)
- 隣接行列：複雑ネットワーク (Zhang,2006)
- 記号力学系

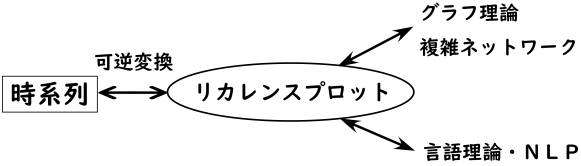


◆ 実対称行列としての解釈（非閾値 RP）

- 行列分解：固有値分解（$A = X\Lambda X'$）など
- リカレンスプロット演算：リカレンスプロット同士の加減算リカレンスプロットを構成
- 分散共分散行列との対応（例えば脳の領野の結合順）
- 画像としての扱い（CNN などへ）
- 複素リカレンスプロットへの拡張
- 絶対値をとらないリカレンスプロット
- （イジング模型としての解釈）

まとめ

- リカレンスプロットの作り方：定義・ε と距離尺度の自由度・実例
- 決定論的カオスとリカレンスプロット：回帰定理の図示化
- 様々なリカレンスプロット
- リカレンスプロットからの時系列復元
- データ変換ツールとしての RP：RQA・ネットワーク・言語・対称行列



リカレンスプロットは複雑な情報における橋渡しツール！

◆ 参考文献

- **最初の論文**
  Eckmann *et al.*. “Recurrence plots of dynamical systems.” Europhys. Lett. 4 973(1987).
- **網羅的 Review**
  Marwan *et al.*. “Recurrence plots for the analysis of complex systems.” Physics reports 438.5-6 (2007): 237-329.
  https://arxiv.org/pdf/2501.13933
- **リカレンスプロットから時系列を再構成する論文**
  Hirata *et al.*. “Reproduction of distance matrices and original time series from recurrence plots and their applications.” The European Physical Journal Special Topics 164.1 (2008): 13-22.

リカレンスプロット研究会：https://plaza.umin.ac.jp/pseudo/recplot/