

カオスってなに？

城 真範（国立研究開発法人産業技術総合研究所）

2026.5.9

電子情報通信学会 教育工学研究会 付属資料（信学技報 ET2026-6, pp.34-36） 2026 年 5 月 4 日版

● イントロ：こんな疑問を持ったことはないですか？

- かき混ぜたら混ざる。なぜ？
- どうして時間は進むだけなの？
- (自動的にバグを見つけるプログラムはないのだろうか)
- (いずれ数学の証明問題は全部解かれるのだろうか?)

関係なさそうなこれらの問題が「カオス」でつながります。

● イントロ：カオスって聞いたことありますか？

ある→どんなイメージ？

- なんかわちゃわちゃしてる
- 散らかってる部屋とか
- あちこちで喧嘩したり仲良かったり
- 混沌。万物のはじまり。モンスターの名前

この講座では「わちゃわちゃ」という表現で通してみます。

★方針：ふわっと語る。数式を出さない（数学好きの方はゴメンナサイ）

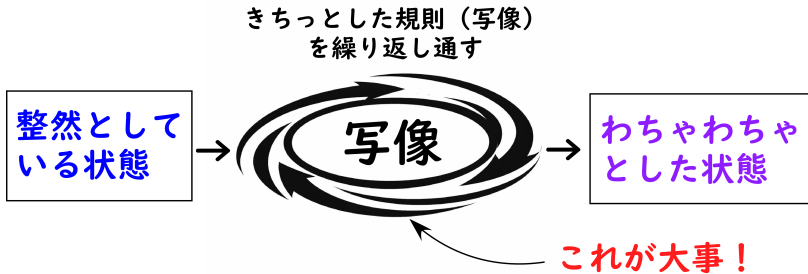
★参考資料（動画；日本語字幕付き）：<https://www.chaos-math.org/ja.html>

● 散らかった部屋はカオスか？ (ChatGPT 作成)



● これだけは覚えて：決定論的カオスは「規則」が大事

科学用語としてのカオス：「決定論的カオス」（科学界には「非決定論的カオス」はないです）



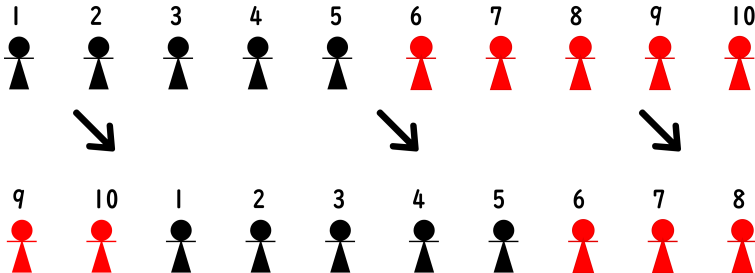
カオス研究はまだ 130 年ちょっとの歴史（宇宙の始まりとか原子論は古代ギリシア時代から）

- 1890 年：三体問題と回帰定理（Poincaré^{ポアンカレ}）
- 1898 年：記号力学とシフト写像（Hadamard^{アダマール}）
- 1927 年：三極管発振回路のノイズからカオスを発見（Van der Pol^{ファンデルポール}）
- 1963 年：ローレンツアトラクタ（Lorenz^{ローレンツ}）
- 1964 年：二重振り子のカオス（上田）、シャルコフスキーの定理（Sharkovskii）
- 1975 年：テント写像、“カオス”と命名（Li, Yorke^{リー ヨーク}）
- 1976 年：ロジスティック写像（May^{メイ}）
- 1978 年：ファイゲンバウム定数の発見（Feigenbaum）
- 1989 年：位相的カオスの定義（Devany^{ディバネイ}）

時間がないので今日出てくるのは赤字のところだけ。本来もっと色々あります。

● “きちっとした規則” でもわちゃわちゃしない例

「全部を***する」系の写像：「全部を右に2回す」

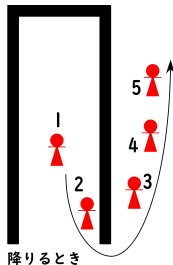
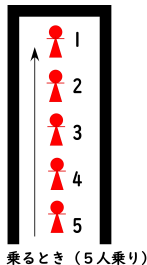


100兆回右に回しても、誰がどこに行くかすぐ計算できる＝予測可能→カオスじゃない

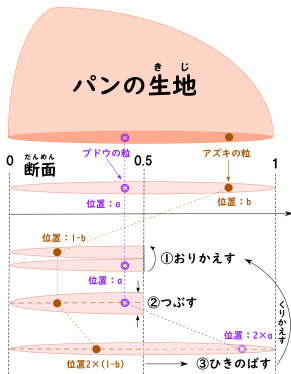
★「カオス」においては「長期予測不可能」であることが大事

● 本当に“きちっとした規則”でカオスになるの？

- 列に並んだ 10 人が地下鉄をおりて階段とエレベータ（奥に細い）で上の階に行く
- 先頭 5 人は階段。後ろ 5 人はエレベータを使う
- エレベータは階段より少し早い



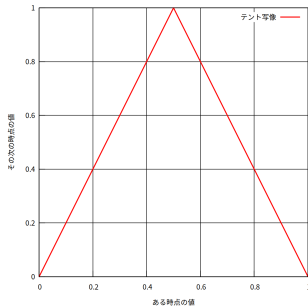
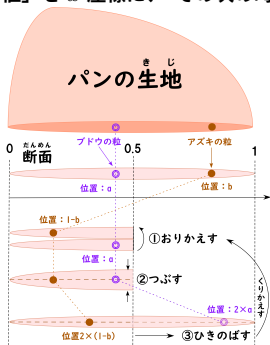
● パンをこねる：同じ写像は昔から使われていた



「折りたたみと引き伸ばしの構造」(ホースシュー構造)という。

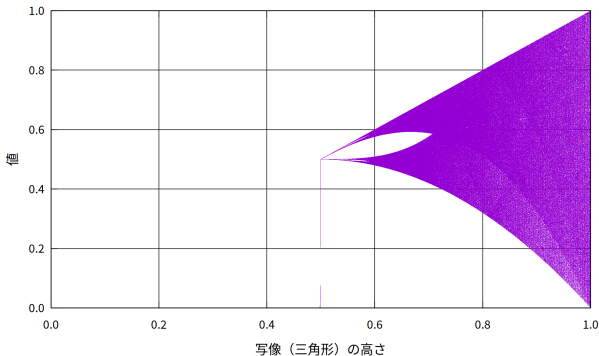
● テント写像のグラフ (ポアンカレプロット)

★「ある時点の値」を x 座標に、「その次の時点の値」を y 座標にとってパンこねをグラフ化



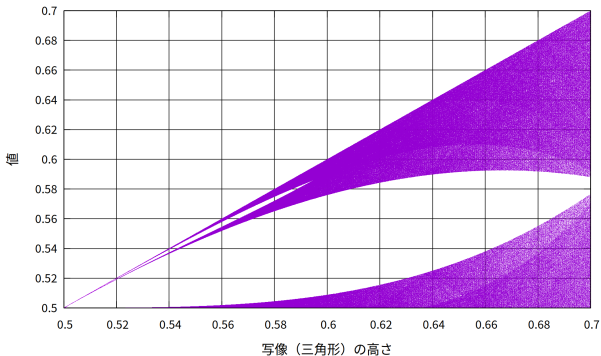
★キャンプで使うテントみたいな形なので「テント写像」(本当)

● テント写像をいじってみる I：山の高さを変える

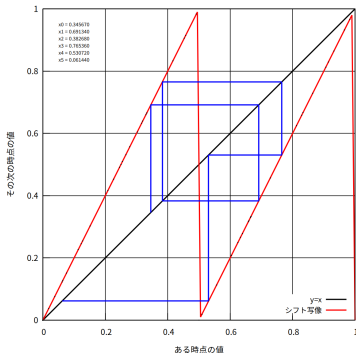
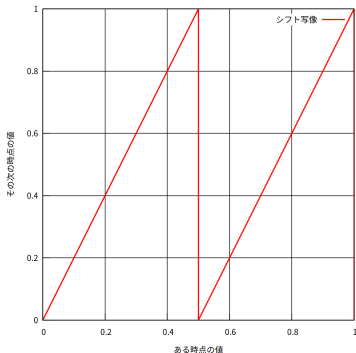


★分岐図といいます。

● 分岐図の拡大：濃淡が見える＝一様乱数ではない

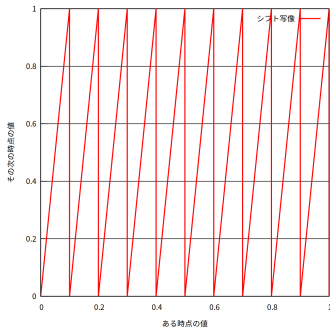
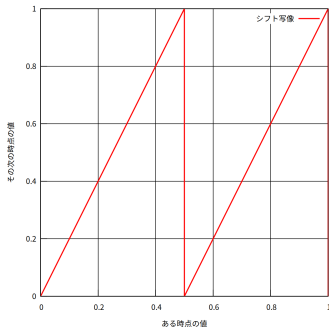


● テント写像をいじってみる II：右半分を左右反転



★シフト写像：2進数変換、停止性問題、不完全性定理などに関係

● シフト写像は N 進数展開する写像 (右は十進展開)



★二進数=四捨五入の繰り返し：0~0.499... なら 0、0.5~1 なら 1。余りをまた四捨五入

★もし山が 10 個あれば「0.975318642」を「9」「7」...「4」「2」に分解

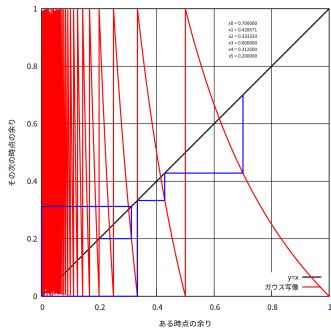
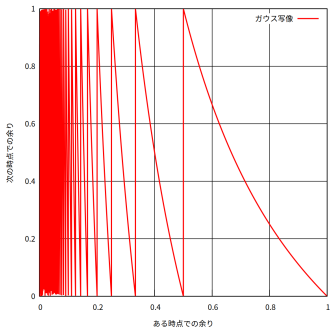
● 連分数：ガウス写像

カオスの写像って直線でないといけない？ →いえ、そんなことはない。

1. ある実数の小数部分だけを取り出す（例：0.12345）
2. 逆数をとる（例： $1/0.12345 = 8.1004455\dots$ ）
3. 1. に戻る（例：0.1004455...）
 - 元が分数なら、どこかで余りがゼロになる
 - 元の実数が2次方程式（そのうち習う！）の解なら余りは循環する
 - それ以外なら余りはわちゃわちゃする

この写像を「ガウス写像」といいます。

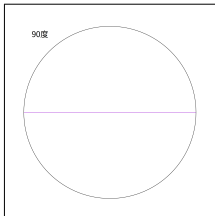
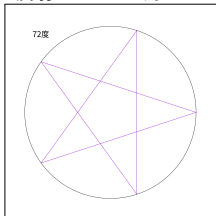
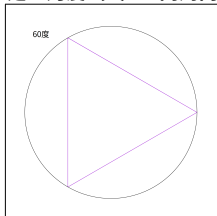
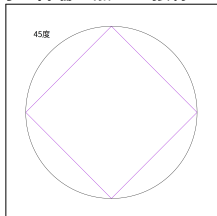
● 曲線でできた写像：ガウス写像



● 結局「わちゃわちゃ」の原因はなに？

上にとがってる写像 $\rightarrow y = x$ の線との間で「複雑な反射」が起きる \rightarrow 複雑な値
「複雑な反射」がカオスを生み出すのではないか？

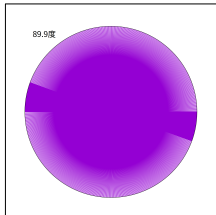
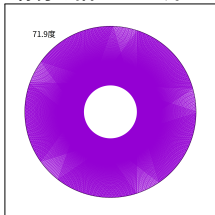
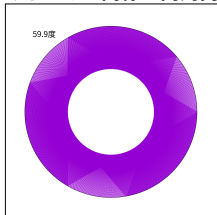
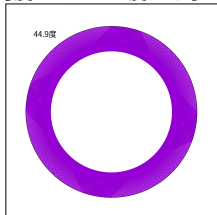
円の右端の点から接線と一定の角度 (α) で円周内を反射させていく。



線分がもとの点にピッタリ戻ってくるならきれいな図形になる (規則的)

● 線分が戻ってこない反射ではどうなるか？

角度 α を 0.1 度だけ小さくしてみても同様に円周内に線分を描いていく。



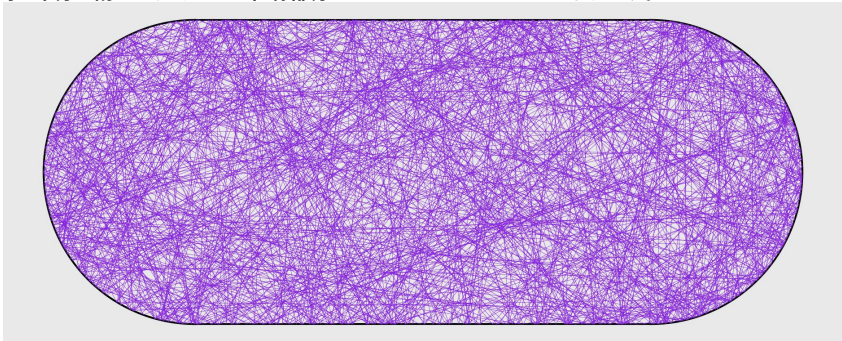
ほとんどの角度では線分が戻ってこない→これはカオス？

100 兆回反射したら点がどの角度になるかすぐ計算できる＝予測可能→カオスではない

$$100 \text{ 兆回後の角度} : \frac{44.9^\circ \times 100000000000000}{360^\circ} \dots \text{の余り}$$

● スタジアム型の反射

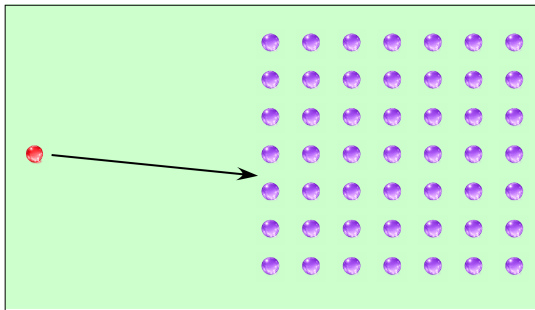
★円を半分に割って、あいだに直線部分をはさむ→これはカオスになります。



じゃあ、カオスって何だよ!?

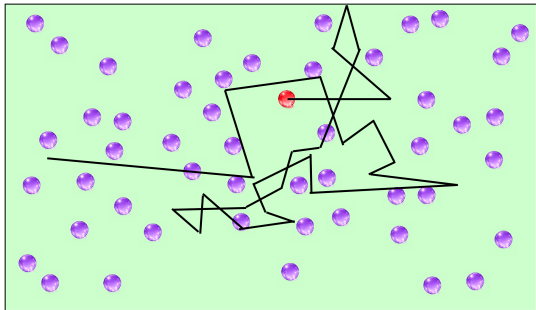
● 反射を使ったゲーム：ビリヤード

ボール同士が反射すると簡単にカオスになる：完全弾性反射の穴無しビリヤード



初期状態は規則的。左の赤い球を右に打ち込む。本来は人が打つのでまっすぐにならない。

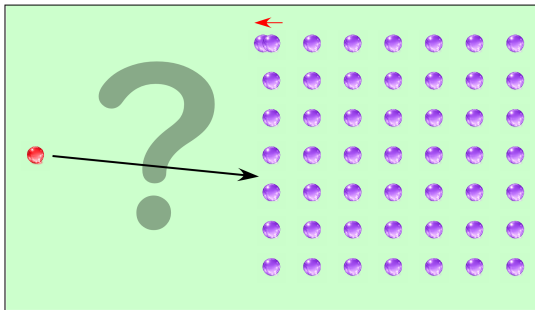
● ビリヤードの球の軌跡はわちゃわちゃする



反射は規則的なのに、かなりわちゃわちゃした軌道になる（カオスの）

● 考えてみよう：初期値鋭敏性

右の盤面の左下の玉だけ少しずらしてみると、どうなる？



★自分でやってみよう。でもその前に考えてみるのがだいじ。

● カオスの特徴の一つ：初期値依存性

- 決定論だから、似た盤面なら似たスタートになるはず
- 最後は「長期予測不可能」になる。

「どこでどんなふうになっちゃうのかが大事」

初期値鋭敏性：最初は似た軌道だが途中から急速に違ってくる性質

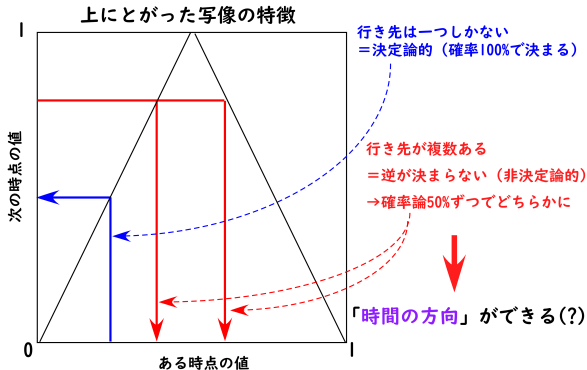
● 気体分子

匂いのもとがなければ、匂いはだんだん薄くなる。なぜ？

- 匂いのもととはとても小さな球（気体の粒）＝ビリヤードと同じ
- 壁や球（気体分子）同士でたくさん反射して、すぐ「わちゃわちゃ」する
- いったんわちゃわちゃしたら、もう規則正しく戻らない（＝熱力学第二法則エントロピー増大則）

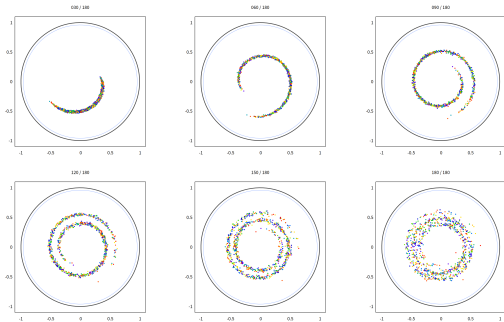
では **なぜ** 「いったんわちゃわちゃしたら、もう規則正しく戻らない」のか？

● 上にとがった写像は逆転できない：時間の方向性



かき混ぜたら混ざる。なぜ？

液体は期待より濃密→粒同士でよくぶつかる→流速の些細な違いでわちゃわちゃする



● 終わりに：現実世界にあるカオスの例

- 人の声の音の波形
- レーザー発振器の周波数
- 神経細胞の発火の間隔
- 二重振り子
- ある種の癌の発生周期
- 水漏れバケツの回転方向 などなど

▶ カオスの出現ポイントを分類してみる ……

- 流体系：乱流とその周辺、真空工学
- 生命系：個体数の変化、神経回路、間欠療法、声
- 天体系：地磁気の逆転、太陽黒点の変化、三体問題
- 人工物：交流回路、楽器の音、ビリヤード、一部のゲーム
- 社会系：電力需要、為替変動、投票行動

● 散らかった部屋はカオスか？

- 片付けてから散らかるまでの写像が決定論的ならカオス
- どのような写像にしたがって散らかっているのかを部屋の利用者に聞く
- どのような写像にしたがって散らかっているのかをカメラなどで分析
- 決定論的な写像にしたがっているなら、勝手に片付けると怒られる
そうでないなら、さっさと片付ける



たぶんこの部屋はカオスではない。

おまけ

● 「反射」を論理に適用する：クレタ人のパラドクス

伝説：「クレタ人エピメニデスが『クレタ人は皆うそつきだ』と言った」

命題「私は嘘つきです」という人は嘘つきですか？（※命題というのは「真（1）」か「偽（0）」かのどちらか。中間はない）

もし「嘘つきだ」（1）→嘘つきが自分を嘘つきだと言ってるなら、本当のことを言ってる

→その人は嘘つきじゃない（0）

もし「嘘つきじゃない」（0）→その人は自分を嘘つきだと言っている

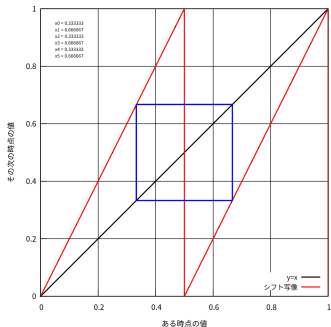
→その人は嘘つきだ（1）

「真（1）」か「偽（0）」か、どっちなの？

● シフト写像とクレタ人のパラドクス

シフト写像は 2 進変換：値が 0.5 以上なら「真 (1)」、0.5 未満なら「偽 (0)」

初期値 $\frac{1}{3}$ のシフト写像の値は $\frac{1}{3}$ と $\frac{2}{3}$ を繰り返す→記号列 010101..... に対応←クレタ人問題



● 停止性問題（チューリング；1936年）

クレタ人のパラドクスをコンピューターのプログラムに適用（厳密には不正確。だいたいの感じとってください）

※暴走：無限ループして計算機のプログラムが終わらない状態

- 問題：あるプログラムが暴走しないかどうかわかるプログラムはつくれるか？
- 答え：絶対に作れない
- 理由：プログラムが暴走しないかどうか判定できるプログラム A があるとする。A は検査対象のプログラムが暴走しないなら「と」、暴走するなら「ほ」と表示する。ここで、A が「と」と表示されたら暴走し、「ほ」と表示されたら止まるプログラム B を考える。B は A によって、どう判定されるか？
 - － B が暴走する：A は「ほ」と判定しないといけないのに「と」と表示される
 - － B が暴走しない：A は「と」と判定しないといけないのに「ほ」と表示される矛盾。だから、そもそもそんなプログラム A はつukれない

● 不完全性定理 (ゲーデル ; 1931 年)

「クレタ人のパラドクス」を“数学全体”を相手に拡張 (厳密には不正確。だいたい感じとってください)

命題 G : 「命題 G は証明できない」

もし命題 G が証明できるなら、「命題 G は証明できない」と矛盾。

だから「命題 G が証明できない」。これは真。

つまり “「命題 G が証明できない」という命題 G は証明できない”

→証明できない命題が存在する！ (人類がどんなに頑張ってもすべての数学の問題を証明できない)

自己言及するあたりが、クレタ人のパラドクスに似ている？